Lösung

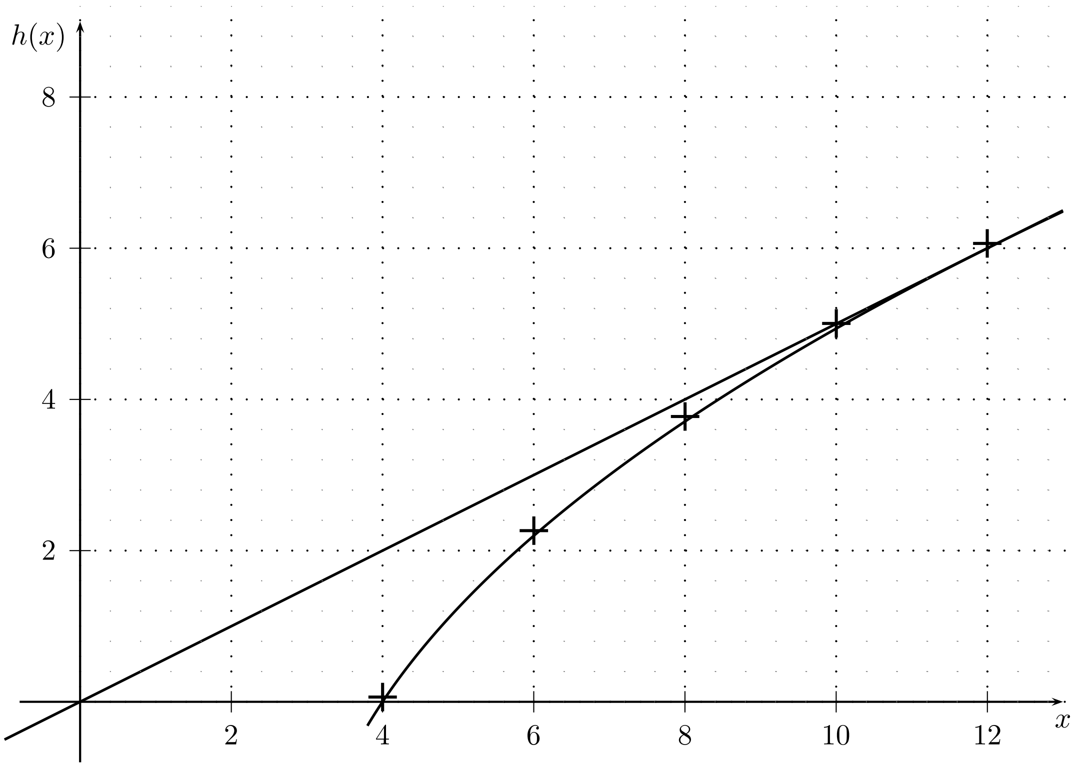
Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Die Tabelle wird durch Auswertung der Funktion h an den vorgegebenen Stellen ausgefüllt. Beispiel:

$$h(4) = 3\sqrt{4-3} - 3 = 3 \cdot \sqrt{1} - 3 = 3 - 3 = 0$$

x	4	6	8	10	12
$h(x)$	0	2,20	3,71	4,94	6

Man sieht, dass die Nullstelle der Funktion h bei $x = 4$ ist, womit die Skalierung der x-Achse durchgeführt werden kann. Ein Teilstrich in der Vorlage entspricht zwei Einheiten. Mittels des Punktes $(12\,|\,6)$ erhält man dann die Skalierung der y-Achse. Auch hier entspricht ein Teilstrich zwei Einheiten.



Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Erläuterung: *Knickfreiheit*

Damit zwei Kurvenstücke knickfrei ineinander übergehen, müssen sie sich zuallerst treffen. Außerdem muss die Steigung der beiden Kurvenstücke an der Nahtstelle identisch sein, da ansonsten ein Knick beim Zeichnen entstehen würde, was sich gut dadurch veranschaulichen lässt, dass man zwei Geraden mit unterschiedlicher Steigung aneinandersetzt.
Sind die beiden Kurvenstücke Graphen von Funktionen f, g und ist x_n die Nahtstelle, an der die beiden Graphen ineinander übergehen sollen, führt die Forderung der Knickfreiheit zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= g(x_n) \\ f'(x_n) &= g'(x_n) \end{aligned}$$

Zuerst muss man die Funktionsgleichung bestimmen, die den ursprünglichen Hang beschreibt. Dabei handelt es sich um eine lineare Funktion, die durch den Ursprung geht und die Steigung $0,5$ besitzt. Es ergibt sich als Funktionsgleichung $g(x) = 0,5x$.
Nun kann die Knickfreiheit am Punkt $(12|6)$ überprüft werden. Die Graphen der Funktionen müssen beide duch den Punkt gehen.

$$\begin{aligned} g(12) &= 0,5 \cdot 12 = 6 \\ h(12) &= 3\sqrt{12-3} - 3 = 3 \cdot \sqrt{9} - 3 = 3 \cdot 3 - 3 = 6 \end{aligned}$$

Desweiteren müssen sie an diesem Punkt das gleiche Steigungsverhalten aufweisen. Um dies nachweisen zu können, benötigen wir zuerst die Ableitung der beiden Funktionen g und h.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0,5 \\ h'(x) &= 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-3}} + 0 = \frac{3}{2\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

Somit können wir nun die Steigungen an der Stelle $x = 12$ vergleichen.

$$h'(12) = \frac{3}{2\sqrt{12-3}} = \frac{3}{2\sqrt{9}} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} = 0,5 = g'(12) \qquad \blacksquare$$

© Abiturloesung.de

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Erläuterung: *Steigungswinkel*

Der Zusammenhang zwischen der Steigung einer Geraden und dem zugehörigen Steigungswinkel ergibt sich aus der Trigonometrie. Zeichnet man, wie in der Skizze dargestellt, an einer beliebigen Stelle der Geraden ein Steigungsdreieck ein, so stellt man fest, dass dieses immer rechtwinklig ist.

Nach der Definition der Steigung m ergibt sich direkt:

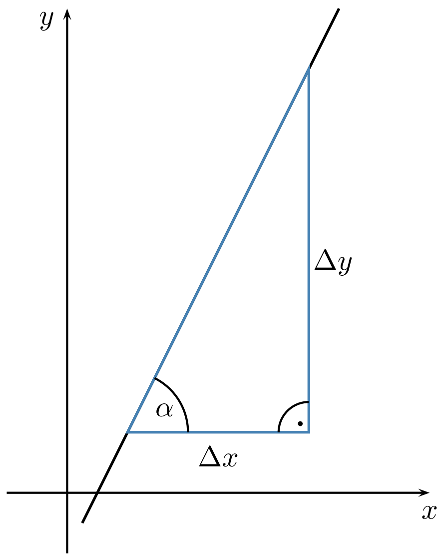
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Andererseits erhält man aus der Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Diese beiden Zeilen führen zu dem gesuchten Zusammenhang:

$$m = \tan(\alpha) \iff \alpha = \arctan(m)$$



Bei einer fallenden Gerade ($m < 0$) liefert der Arkustangens einen Winkel β im Intervall $]-90°; 0°[$. Der Winkel α von der x-Achse zur Geraden, ergibt sich in diesem Fall durch $\alpha = 180° + \beta$

Um den Steigungswinkel des Hanges an der Stelle $x = 4$ zu bestimmen, muss man wissen, wie groß die Steigung m des Graphen an dieser Stelle ist. Diesen Wert erhält man, indem man die Ableitung von h an der Stelle auswertet.

$$m = h'(4) = \frac{3}{2\sqrt{4-3}} = \frac{3}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

Der Zusammenhang zwischen der Steigung m und dem zugehörigen Winkel wird durch die Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck geliefert. Es gilt:

$$\tan(\alpha) = m \implies \arctan(m) = \alpha$$

In unserem Fall ergibt sich hiermit:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56{,}31°$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Zuerst muss bestimmt werden, bei welchen Werten für die Steigung m des Graphen ein größerer Winkel als 45° entsteht. Mit dem Zusammenhang $m = \tan(\alpha)$ aus Teilaufgabe 2.1 können wir bestimmen, dass ein Steigungswinkel von 45° genau zu einer Steigung von $m = \tan(45°) = 1$ führt. Da die Tangensfunktion im Intervall $[45°; 90°[$ streng monoton steigend ist, kann man folgern, dass der Hang bei einer Steigung größer 1 gesichert werden muss. Man muss somit die Ungleichung $h'(x) > 1$ lösen.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2\sqrt{x-3}} &> 1 \\
\frac{1}{\sqrt{x-3}} &> \frac{2}{3} \\
\sqrt{x-3} &< \frac{3}{2} && \text{Achtung: Kehrwert dreht Ungleichheitszeichen um} \\
x-3 &< \frac{9}{4} \\
x &< \frac{21}{4}
\end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis aus der Teilaufgabe 2.1 ergibt sich, dass der Hang im Intervall $[4; 5,25[$ zusätzlich gesichert werden muss.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Die Bedeutung der vorgegebenen Zeilen ist wie folgt:

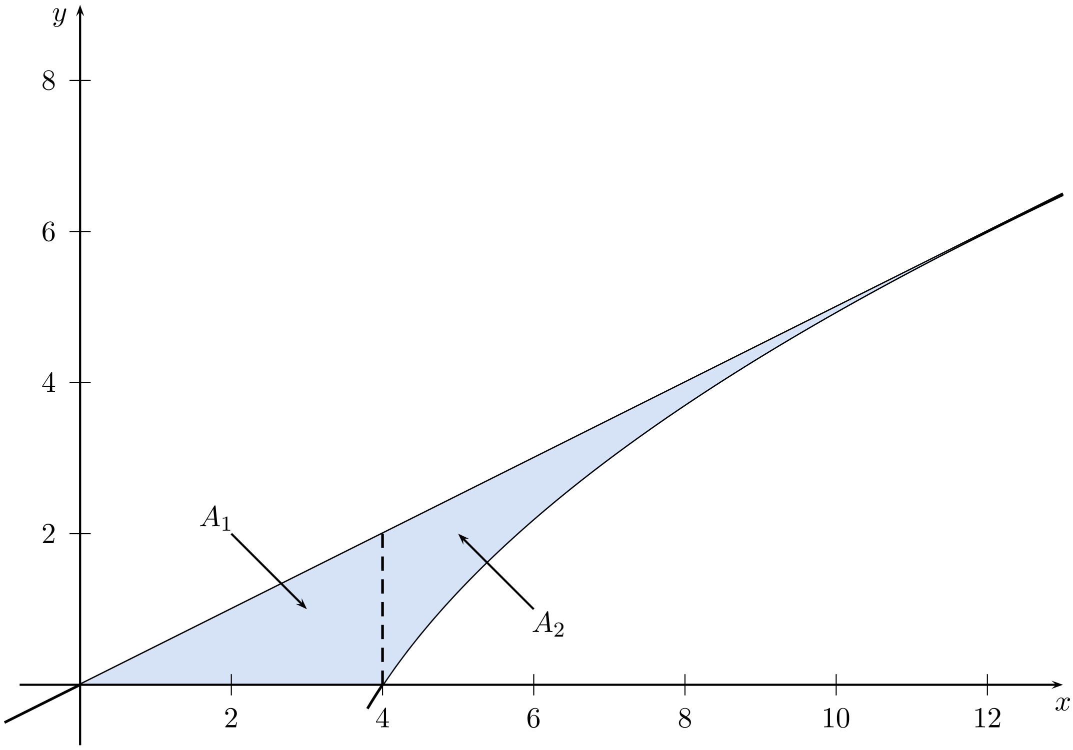
(I) Mit den drei Punkten $(0|0)$, $(12|0)$ und $(12|6)$ wird ein rechtwinkliges Dreieck festgelegt. Mit der Bezeichnung d für die Länge der Hypotenuse ergibt sich die Gleichung aus dem Satz des Pythagoras.

(II) Aus der Gleichung (I) wird die Wurzel gezogen und somit die Länge der Hypotenuse (ca. $13,42$) konkret berechnet.

Die Markierung, die die Bauarbeiter anbringen müssen, muss sich ausgehend vom zukünftigen Straßenniveau 13,42 m den Hang entlang aufwärts befinden.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Um das Volumen des abzutragenden Erdreichs zu bestimmen, muss zunächst die Größe der Querschnittsfläche bestimmt werden, die in der Skizze blau unterlegt ist, da dieser Bereich über eine Länge von 2 km abgetragen werden muss.



Um den blau unterlegten Flächeninhalt A_{ges} zu bestimmen, zerlegt man die Fläche in die beiden Teilflächen A_1 und A_2. Der Flächeninhalt von A_1 ergibt sich direkt aus der Flächeninhaltsformel für das Dreieck.

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$$

Zur Bestimmung des Flächeninhalts von A_2 muss die Differenzfunktion von g und h im Intervall $[4; 12]$ integriert werden.

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_4^{12} g(x) - h(x)\,dx \\
&= \int_4^{12} 0,5x - (3\sqrt{x-3} - 3)\,dx \\
&= \int_4^{12} 0,5x - 3\sqrt{x-3} + 3\,dx \\
&= \int_4^{12} 0,5x + 3 - 3(x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 + 3x - 3 \cdot \frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_4^{12}$$
$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 12^2 + 3 \cdot 12 - 3 \cdot \frac{2}{3}(12-3)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{4}4^2 + 3 \cdot 4 - 3 \cdot \frac{2}{3}(4-3)^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= (36 + 36 - 54) - (4 + 12 - 2)$$
$$= 18 - 14$$
$$= 4$$

Für die Gesamtfläche A_{ges} ergibt sich:

$$A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 = 4 + 4 = 8$$

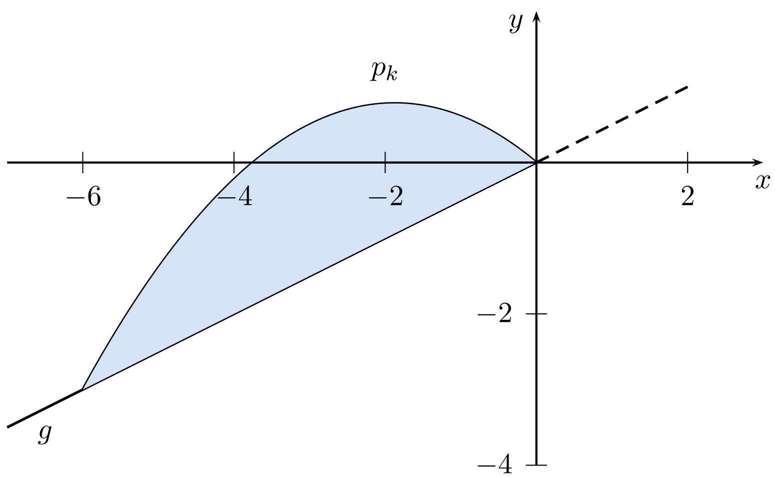
Die Querschnittsfläche des abzutragenden Hanges beträgt somit $8\,\text{m}^2$. Da dieser auf 2 km=2000 m abgetragen wird, berechnet sich das gesucht Volumen V zu

$$V = 8\,\text{m} \cdot 2000\,\text{m}^2 = 16000\,\text{m}^3.$$

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Wichtig für das Verständnis der Aufgabe ist zu erkennen, dass die Parabel $p_k(x)$, die durch die Aufschüttung entsteht, den Graphen des ursprünglichen Hangs $g(x)$ an den Stellen $x = -6$ und $x = 0$ schneidet. Somit muss man $p_k(-6) = g(-6)$ und $p_k(0) = g(0)$ zeigen.

$$\begin{aligned} p_k(-6) &= k \cdot (-6)^2 + 6k \cdot (-6) + 0,5 \cdot (-6) = 36k - 36k - 3 = -3 = 0,5 \cdot (-6) = g(-6) \\ p_k(0) &= k \cdot 0^2 + 6k \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 = 0 = 0,5 \cdot 0 = g(0) \end{aligned}$$



Die Querschnittsfläche (im Bild blau unterlegt), die die Parabel mit dem Graphen von g einschließt, muss vom Inhalt der Fläche entsprechen, die in Teilaufgabe 3.2 als Zwischenergebnis

A_{ges} errechnet wurde, also 8 FE. Es führt dies zur Forderung

$$\int_{-6}^{0} p_k(x) - g(x)\,dx = 8.$$

Hieraus lässt sich k bestimmen.

$$\begin{aligned}
\int_{-6}^{0} p_k(x) - g(x)\,dx &= \int_{-6}^{0} kx^2 + 6kx\,dx \\
&= \left[\frac{k}{3}x^3 + \frac{6k}{2}x^2\right]_{-6}^{0} \\
&= \frac{k}{3}\cdot 0^3 + \frac{6k}{2}\cdot 0^2 - \left(\frac{k}{3}\cdot(-6)^3 + \frac{6k}{2}\cdot(-6)^2\right) \\
&= 0 - (-72k + 108k) \\
&= -36k = 8
\end{aligned}$$

Es ergibt sich $k = -\frac{8}{36} = -\frac{2}{9}$.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Die Stelle, an der der Hügel am höchsten über die Straße ragt, ist der Hochpunkt der Parabel, die sich durch die Funktionsgleichung $p(x) = p_{-\frac{2}{9}}(x) = -\frac{2}{9}x^2 - \frac{5}{6}x$ beschreiben lässt. Der Funktionswert an der Stelle des Hochpunktes gibt direkt an, um wie viel die Straße überragt wird, da sich diese auf der Höhe der x-Achse ($y = 0$) befindet.
Zur Bestimmung des Hochpunktes leitet man $p(x)$ ab und bestimmt die Nullstelle der Ableitung $p'(x)$. Die notwendige Bedingung kann man sich sparen, da eine nach unten geöffnete Parabel grundsätzlich nur einen Hochpunkt besitzt.

$$p'(x) = -\frac{4}{9}x - \frac{5}{6} = 0 \iff x = -\frac{15}{8}$$

$$p(-\frac{15}{8}) = -\frac{2}{9}(-\frac{15}{8})^2 - \frac{5}{6}\cdot(-\frac{15}{8}) = -\frac{25}{32} + \frac{25}{16} = \frac{25}{32} \approx 0,78$$

Der Hang ragt ca.78 cm über die Straße.